

Noson S. Yanofsky

Wat je brein te boven gaat

DE GRENZEN VAN WETENSCHAP,
WISKUNDE EN LOGICA

Vertaald door Robert Vernooy

Uitgeverij Atlas Contact
Amsterdam/Antwerpen

Inhoud

Voorwoord 9

1 Inleiding 13

2 Paradoxen in de taal 29

2.1 Leugenaar! 30

2.2 Zelfreferentiële paradoxen 34

2.3 Het benoemen van getallen 42

3 Filosofische raadsels 47

3.1 Schepen, mensen en andere objecten 48

3.2 Zeno en Gödel 59

3.3 Kale mannen, bergen en vaagheid 71

3.4 Weten over weten 78

4 Oneindigheidsraadsels 86

4.1 Verzamelingen en afmetingen 87

4.2 Oneindige verzamelingen 92

4.3 Iets groters? 100

4.4 Kenbaar en onkenbaar 112

5 Het berekenen van complexiteiten 125

5.1 Enkele eenvoudige problemen 126

5.2 Enkele lastige problemen 139

5.3 Het houdt allemaal verband met elkaar 152

5.4 Moeilijke problemen bijna oplossen 162

5.5 Nog moeilijkere problemen 166

- 6 Het berekenen van onmogelijkheden 170
 - 6.1 Algoritmes, computers, machines en programma's 171
 - 6.2 Stoppen of niet stoppen? 175
 - 6.3 Het houdt allemaal verband met elkaar 183
 - 6.4 Een hiërarchie van het onbekende 191
 - 6.5 Geesten, hersenen en computers 197

- 7 Wetenschappelijke beperkingen 202
 - 7.1 Chaos en kosmos 202
 - 7.2 Kwantummechanica 219
 - 7.3 De relativiteitstheorie 264

- 8 Metawetenschappelijke mysteries 288
 - 8.1 De filosofische beperkingen van de wetenschap 289
 - 8.2 Wetenschap en wiskunde 309
 - 8.3 De oorsprong van de rede 334

- 9 Wiskundige belemmeringen 363
 - 9.1 Klassieke beperkingen 364
 - 9.2 De theorie van Galois 371
 - 9.3 Moeilijker dan het stopprobleem 377
 - 9.4 Logica 388
 - 9.5 Axioma's en onafhankelijkheid 403

- 10 De rede voorbij 412
 - 10.1 Samenvattend 412
 - 10.2 Het definiëren van de rede 419
 - 10.3 Voorbij de grenzen kijken 424

Dankwoord 429

Noten 433

Bibliografie 459

Register 470

Voorwoord

Hoe meer we over de wereld te weten komen, en hoe meer onze studie zich verdiept, des te bewuster, specifiekker en helderder zal onze kennis worden van wat wij niet weten, onze kennis van onze onwetendheid.

– Karl Popper

Een man moet zijn beperkingen kennen.

– Harry Callahan, *Magnum Force* (1973)

Alles moet zo eenvoudig mogelijk gemaakt worden, maar niet eenvoudiger dan dat.

– Toegeschreven aan Albert Einstein

Inzicht brengt ambivalentie met zich mee. Zodra we iets weten, vinden we het dikwijls saai en banaal. Het mysterieuze en onbekende fascineren ons daarentegen en houden onze aandacht vast. Wat wij niet weten of begrijpen, is wat ons interesseert, en wat wij níét kunnen weten intrigeert ons des te meer. Dit boek gaat over onderwerpen die wij met de rede niet kunnen doorgronden omdat zij de rede te boven gaan.

Er zijn veel boeken over de verbazingwekkende feiten die de wetenschap, de wiskunde en de rede ons onthuld hebben. Er zijn ook boeken over onderwerpen die door de wetenschap, de wiskunde en de rede niet volledig verklaard zijn. Dit boek is een beetje anders. Hier bestuderen wij wat met behulp van de wetenschap, de wiskunde en de rede niet onthuld kán worden. Wat kan er niet voorspeld of geweten worden? Wat zal er nooit begrepen worden? Wat zijn de beperkingen van computers, de natuurkunde, de logica en onze denkprocessen? Wat ligt buiten de grenzen van de rede? Dit boek wil een aantal van deze vragen beantwoorden en bevat veel ideeën die vraagtekens zetten bij onze

diepgewortelde overtuigingen omtrent het universum, onze rationaliteit en onszelf.

Daarbij zullen we simpele computerproblemen bestuderen waarvan de oplossing talloze eeuwen zou kosten; stilstaan bij perfecte zinnen die geen betekenis hebben; verschillende niveaus van oneindigheid leren kennen; ons in de bizarre en wonderbaarlijke wereld van het kwantum storten; specifieke problemen bespreken die computers nooit kunnen oplossen; kennismaken met vlinders die sneeuwstormen veroorzaken; nadenken over deeltjes die op verschillende feestjes tegelijk dansen; horen over paradoxen en zelfreferentiële paradoxen; kijken wat de relativiteitstheorie ons vertelt over onze naïeve opvattingen van ruimte, tijd en causaliteit; Gödels beroemde stellingen over de beperkingen van de logica begrijpen; bepaalde problemen in de wis- en natuurkunde ontdekken die onoplosbaar zijn; de aard van de wetenschap, de wetkunde en de rede verkennen; ons afvragen waarom het heelal perfect lijkt voor mensen; en de complexe relatie tussen onze geest, de rede en het tastbare universum onderzoeken. We zullen ook proberen om een blik over de grenzen van de rede te werpen en te kijken wat zich daar eventueel bevindt. Deze en vele andere fascinerende onderwerpen zullen op een duidelijke en overzichtelijke manier gepresenteerd worden.

Als we deze verschillende beperkingen op diverse gebieden bestuderen, zullen we zien dat veel van de beperkingen een soortgelijk patroon hebben. Die patronen zullen onderzocht worden om de structuur van de rede en haar beperkingen beter te begrijpen.

Dit boek is geen compendium van alle verschillende beperkingen van de rede. Ons doel is veeleer om te begrijpen hoe die grenzen ontstaan en waarom de rede daar niet overheen kan gaan. Op elk gebied worden representatieve beperkingen geselecteerd en uitgebreid besproken.

Ik wil de beperkingen niet slechts opsommen, maar vooral verklaren of althans een idee geven waarom een bepaald gebied voorbij de grenzen van de rede ligt. Het is belangrijk te beseffen dat dit boek niet speculatief wil zijn of een newage-oriëntatie wil hebben. Evenmin is het een geschiedenisboek waarin ik de betekenis van ideeën wil verdoezelen om me te concentreren op hun chronologische ontwikkeling. Dit is een populairwetenschappelijk boek dat geleidelijk en helder de gepresenteerde ideeën zal verklaren.

Omdat ik het eens ben met de uitspraak van Stephen Hawking dat met elke vergelijking het aantal lezers wordt gehalveerd, bevat dit boek heel weinig vergelijkingen. Ik geloof echter wel dat diagrammen, schema's en grafieken complexe ideeën eenvoudiger kunnen maken. Mijn doel is helderheid.

Elk hoofdstuk gaat over een ander gebied: wetenschap, wiskunde, taal, filosofie, enzovoort. Deze hoofdstukken zijn geordend van concreet naar abstract. Ik begin met eenvoudige problemen van de alledaagse taal en ga vervolgens in op simpele filosofische vragen, om te besluiten met de abstracte wereld van de wiskunde. De hoofdstukken staan over het algemeen los van elkaar en kunnen in elke volgorde worden gelezen. De lezers worden aangemoedigd om te beginnen met de onderwerpen die hen het meest interesseren. (Het steeds terugkerende thema van zelfreferentiële paradoxen is te vinden in de hoofdstukken 2, 4, 6 en 9.)

Inleiding

De menselijke rede moet stilstaan bij vragen die zij niet kan afwijzen, omdat ze door haar eigen aard worden aangedragen, maar die zij niet kan beantwoorden, omdat zij alle verstandelijke vermogens te boven gaan.

– Immanuel Kant (1724-1804)

Als de cirkel van het licht groter wordt, geldt dat ook voor de omtrek van het donker.

– Toegeschreven aan Albert Einstein

Zorba: Waarom sterven jonge mensen? Waarom sterft wie dan ook?

Basil: Ik weet het niet.

Zorba: Wat heb je aan al jouw stomme boeken als ze daar geen antwoord op kunnen geven?

Basil: Ze vertellen me over de zielenstrijd van mensen die geen antwoord kunnen geven op vragen zoals die van jou.

Zorba: Ik spuug op die zielenstrijd!

– *Zorba the Greek* (1964)

Een beschaving kan afgemeten worden aan de vorderingen die zij heeft gemaakt op het gebied van wetenschap en technologie. Hoe geavanceerder de wetenschap en de technologie, des te geavanceerder de beschaving. Onze beschaving wordt geavanceerder geacht dan wat wij primitieve samenlevingen noemen vanwege alle technologische vooruitgang die wij hebben geboekt. Maar als een buitenaardse beschaving de aarde zou bezoeken, zou die ons, bijna per definitie, primitief vinden, omdat zij interstellair ruimte reizen kan maken en wij niet. De reden dat wetenschap en technologie als maatstaf worden gebruikt, is

dat die activiteiten het enige cultuuraspect zijn dat op zichzelf voortbouwt. Wat door de ene generatie wordt gedaan, wordt gebruikt door de volgende generatie. Dit is fraai geformuleerd door een van de grootste wetenschappers aller tijden, Isaac Newton (1643-1727), die naar verluidt heeft gezegd: ‘Als ik verder heb gezien, komt dat alleen doordat ik op de schouders van reuzen heb gestaan.’ Door deze voortdurende cumulatieve vooruitgang is de wetenschap een goede maatstaf om beschavingen met elkaar te vergelijken. In tegenstelling tot wetenschap en technologie bouwen andere domeinen van een cultuur, zoals de kunsten, menselijke relaties, literatuur, politiek, ethiek, en wat dies meer zij niet op zichzelf voort.

Een andere maatstaf voor een beschaving is de mate waarin zij onwetenschappelijke en irrationele ideeën heeft uitgebannen. Wij zijn tegenwoordig meer geavanceerd omdat we de alchemie in de prullenbak van domme dromen hebben gegooid en alleen nog scheikunde bestuderen. Eeuwen aan verhandelingen over astrologie zijn tot onzin bestempeld terwijl we wel de astronomie blijven bestuderen. Als een beschaving voortschrijdt, onderwerpt zij haar overtuigingen en mythen aan een logische analyse en verwerpt zij dat wat niet binnen de grenzen van de rede ligt.

De rede is het instrument dat een beschaving gebruikt voor die vooruitgang. Rationaliteit en de rede zijn de middelen die een samenleving gebruikt om zich te ontwikkelen. Als een cultuur de rede volgt, zal zij vooruitgang boeken. Als zij van de rede afwijkt, of de grenzen van de rede overschrijdt, stagneert zij of beleeft zij een terugval.

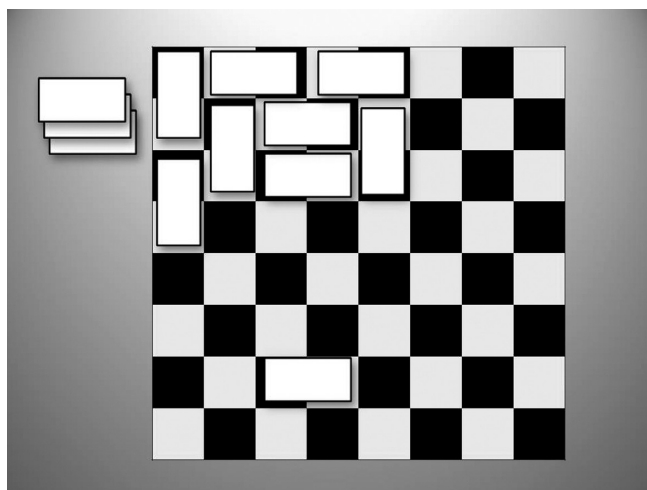
De rede kent vele gedaanten. In algemene (en misschien onnauwkeurige) termen is de wetenschap de taal die wij gebruiken om het tastbare en meetbare universum te beschrijven en te voorspellen. De meer abstracte wiskunde kan in twee gebieden onderverdeeld worden: de toegepaste wiskunde is de taal van de wetenschap, en de zuivere wiskunde is de taal van de rede. Logica is ook een taal van de rede. Omdat wetenschap, technologie, rede, rationaliteit, logica en wiskunde allemaal nauw met elkaar verbonden zijn, zal veel van wat ik over een van die domeinen zeg doorgaans ook voor alle andere gelden. Soms zal ik het woord ‘rede’ gewoon gebruiken om ze allemaal te beschrijven.

Eeuwenlang hebben filosofen nagedacht en gedebatteerd over wat mensen wel en niet kunnen weten. De tak van de filosofie die zich be-

zighoudt met de menselijke kennis en haar beperkingen heet epistemologie. Hoewel de ideeën van zulke filosofen fascinerend zijn, zal hun werk hier niet centraal staan. In plaats daarvan zullen wij ons richten op wat wetenschappers, wiskundigen en de huidige onderzoekers ons te vertellen hebben over de grenzen van de menselijke kennis en rede.

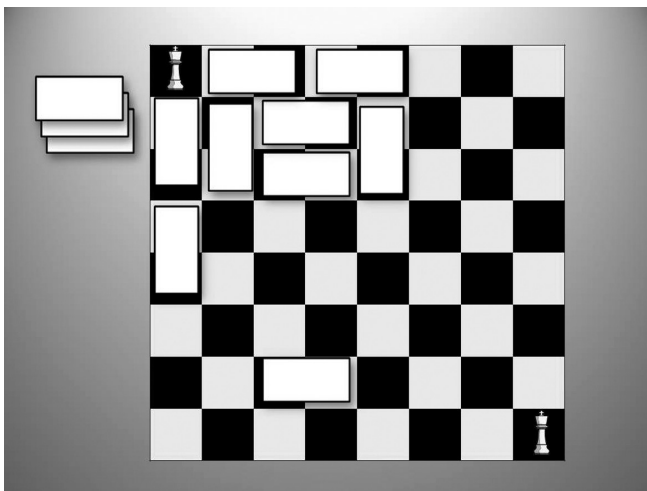
Een van de meest verbazingwekkende aspecten van de moderne wetenschap, wiskunde en rationaliteit is dat ze zich ontwikkeld hebben tot een niveau waarop ze hun eigen beperkingen kunnen zien. Recentelijk hebben wetenschappers en wiskundigen zich aangesloten bij de filosofen in de discussie over de beperkingen van het menselijk vermogen om de wereld te kennen. Die wetenschappelijke beperkingen van de rede zijn het hoofdonderwerp van dit boek.

Hier volgt een aardig puzzeltje dat een indruk geeft van wat het voor de rede betekent om een beperking te beschrijven. De puzzel is ontzettend leuk, de moeite van het overpeinzen waard en wordt ook van harte aangeraden als een uitdaging op elke cocktailparty. Neem een normaal schaakbord van 8 bij 8 en een stel dominostenen van 2 bij 1. Het schaakbord heeft 64 vakken en elke dominosteentje bedekt twee vierkanten, zodat er 32 stenen nodig zullen zijn. Er zijn miljoenen manieren om deze taak uit te voeren. In figuur 1.1 is te zien hoe we ermee zouden kunnen beginnen.



Figuur 1.1 Een schaakbord bedekken met dominostenen

Dat was best makkelijk. Laten we nu eens iets proberen wat lastiger is. Zet twee koninginnen op de tegenover elkaar gelegen hoeken van het schaakbord en probeer alle vierkanten te bedekken behalve die met de koninginnen, zoals in figuur 1.2. Er moeten 62 vierkanten bedekt worden, wat betekent dat er 31 dominostenen nodig zijn. Probeer maar!



Figuur 1.2 Een schaakbord bedekken zonder de twee tegenover elkaar gelegen hoeken

Nadat je een tijdje met dit probleem hebt geworsteld en niet elk vierkant hebt kunnen bedekken, zou je kunnen overwegen om het aan anderen te laten zien – met name aan puzzelfanaten. Die zullen dezelfde ervaring hebben. Misschien zou je een computer op dit probleem willen zetten omdat een machine snel vele mogelijkheden kan uitproberen. Er zijn miljoenen, zo niet miljarden, mogelijke manieren waarop je een begin kunt maken met de plaatsing van de stenen op het bord. Niettemin is er geen mens of computer die deze taak ooit kan voltooien.

De reden dat dit eenvoudige probleem van het plaatsen van 31 dominostenen op een schaakbord zo moeilijk lijkt, is dat het niet *kán*. Het is geen moeilijk probleem; het is een *onmogelijk* probleem. Het is zelfs makkelijk te verklaren waarom dat zo is. Elke dominosteentje is 2 bij 1 en moet derhalve een zwart en een wit vierkant op het schaakbord bedekken. Het oorspronkelijke bord in figuur 1.1 had 32 zwarte en 32 witte

vierkanten om te bedekken. Het bord was volledig symmetrisch. Maar het bord in figuur 1.2 heeft 30 zwarte en 32 witte vierkanten die bedekt moeten worden. De symmetrie is doorbroken. Niemand zal die 62 vierkanten zo met dominostenen kunnen bedekken dat elk daarvan zich op één zwart en één wit vierkant bevindt. Verplaats nu de koninginnen zodat de ene op een zwart vierkant staat en de andere op een wit, en probeer het nog eens.

Dit puzzeltje heeft veel leuke eigenschappen. Het is makkelijk uit te leggen, makkelijk te proberen een oplossing te vinden en bij die pogingen kan een computer gebruikt worden. Toch kan het niet opgelost worden. Dat is niet omdat wij er niet slim genoeg voor zijn of omdat het probleem de vermogens van de huidige technologie te boven gaat, maar omdat het helemaal niet opgelost kan worden. Dat is niet iemands mening, maar een vaststaand feit. De rede dicteert dat ons vermogen om dit probleem op te lossen beperkt is. Het beste aspect van dit probleem is dat het makkelijk te verklaren is waarom het onoplosbaar is. Als die verklaring eenmaal uiteengezet is, zul je er volledig van overtuigd zijn en deze banaal vinden.

Dit boek bevat een groot aantal van zulke onoplosbare problemen en beperkingen.

In plaats van een ordelijke samenvatting van elk hoofdstuk te geven, zal ik de soorten beperkingen classificeren die in dit boek worden behandeld. Voor elk type beperkingen zal ik naar voorbeelden uit de verschillende hoofdstukken kijken. Dat zal het boek een coherenter structuur geven.

Er zijn legio voorbeelden van beperkingen. Computerwetenschappers hebben aangetoond dat er veel taken zijn die computers niet binnen een redelijke tijd kunnen uitvoeren (hoofdstuk 5). Ze hebben ook aangetoond dat er bepaalde taken zijn die computers überhaupt niet kunnen uitvoeren (hoofdstuk 6). Natuurkundigen hebben het erover hoe complex de wereld is en hoe sommige verschijnselen dermate gecompliceerd zijn dat de wetenschap en de wiskunde ze niet kunnen voorspellen (sectie 7.1). Wiskundigen hebben vastgesteld dat bepaalde soorten vergelijkingen niet met normale middelen opgelost kunnen worden (sectie 9.2). Logici hebben bewezen dat er beperkingen zijn in wat er bewezen kan worden. Ze hebben logische uitspraken beschreven

die wel waar zijn maar niet bewezen kunnen worden (sectie 9.4). Taal- filosofen hebben aangetoond dat ons vermogen om de wereld waarin wij leven te beschrijven beperkt is (hoofdstuk 2).

Er zijn andere soorten beperkingen die, in zekere zin, fundamenteeler zijn. Er zijn beperkingen waaruit blijkt dat onze naïeve intuïtie omtrent de wereld en onze relatie tot die wereld niet klopt. Wij moeten de manier waarop wij over het universum en zijn eigenschappen denken herzien. Alleen al onze aanname dat er een objectieve definitie van een bepaald tastbaar object bestaat moet heroverwogen worden (sectie 3.1). De klassieke filosoof Zeno heeft aangetoond dat onze gebruikelijke ideeën over ruimte, tijd en beweging grondiger geanalyseerd moeten worden (sectie 3.2). De kwantummechanica heeft ons geleerd dat de relatie tussen de kenner en het gekende niet eenvoudig is. Deze tak van de natuurkunde heeft ons ook getoond dat in deze wereld alles nauwer met elkaar is verbonden dan voorheen werd gedacht (sectie 7.2). Onderzoekers hebben aangetoond dat onze simpele intuïties met betrekking tot oneindigheid onjuist zijn en bijgesteld moeten worden (hoofdstuk 4). De relativiteitstheorie heeft bewezen dat onze ideeën over ruimte, tijd en causaliteit onjuist zijn en gecorrigeerd moeten worden. Natuurkundigen hebben aangetoond dat er geen objectieve maatstaf is voor lengte of duur (sectie 7.3). Ook de relatie tussen ons, onze wereld, en de wetenschap en wiskunde die wij gebruiken om de wereld te beschrijven is niet simpel (hoofdstuk 8). Al deze onderwerpen, en nog vele andere, komen op de volgende pagina's uitgebreid aan de orde.

De zojuist genoemde beperkingen worden op vele manieren gedemonstreerd. Een van de interessantere manieren is met paradoxen. Dit woord komt van het Griekse *para-* 'strijdig' en *doxa* 'mening'. De *Oxford English Dictionary* geeft veel overlappende definities, onder andere

- Een uitspraak of stelling die in strijd is met de gangbare mening of overtuiging. (Bijvoorbeeld: 'Meeroken is niet zo slecht voor je.' 'Democratie is niet altijd de beste regeringsvorm'.)
- Een schijnbaar absurde of tegenstrijdige uitspraak of bewering, of een die erg tegen het gevoel indruist, die na onderzoek, analyse of toelichting niettemin gegrond of juist kan blijken. (Bijvoorbeeld: 'Op lange termijn is het niet goed om op de aandelenmarkt te beleggen.' 'Staan kost meer inspanning dan lopen'.)

Voor ons zal de belangrijkste definitie zijn:

- Een redenering, gebaseerd op (schijnbaar) aanvaardbare premissen, waarbij (schijnbaar) steekhoudende argumenten worden gebruikt, en die tot een conclusie leidt die in strijd met het gezond verstand, logisch onaanvaardbaar of tegenstrijdig is.

Wij zullen ons vooral met zulke paradoxen bezighouden. Hierbij heb je een premisse of aanname en kom je met gebruikmaking van goede logica tot een onwaarheid. Deze paradox of afleiding kunnen we als volgt voorstellen:

aanname \Rightarrow onwaarheid.

Omdat onwaarheden zich niet voor kunnen doen en omdat onze afleiding gebaseerd was op correcte logica, is de enige conclusie dat onze aanname onjuist was. In zekere zin is de paradox een test om te kijken of een aanname een legitieme toevoeging aan de rede is. Als je met correct redeneren en een bepaalde aanname op een onwaarheid uitkomt, dan is die aanname onjuist. De paradox toont aan dat we de grenzen van de rede hebben overschreden. In die zin is de paradox iets wat wijst op een onjuiste opvatting. Hij wijst op het feit dat de aanname onjuist is. Omdat de aanname onjuist is, kan hij niet aan de rede worden toegevoegd. Dit is een beperking van de rede.

Het soort onwaarheid dat wij het meest zullen tegenkomen is een contradictie. Met een contradictie bedoel ik een feit dat zowel juist als onjuist is gebleken. Dit wordt geschreven als:

aanname \Rightarrow contradictie.

Aangezien het universum geen contradicties kent, moet er iets mis zijn met de aanname. Zo zullen we in hoofdstuk 6 zien dat we een contradictie met betrekking tot bepaalde computers kunnen afleiden als we aannemen dat een computer een bepaalde taak kan uitvoeren. Omdat er geen contradicties bestaan met betrekking tot concrete objecten zoals computers, moet er iets mis zijn met onze aanname.

Zulke paradoxen werken op dezelfde manier als een veelvoorko-

mend wiskundig bewijs. Een ‘bewijs door middel van contradictie’, of in het Latijn *reductio ad absurdum* (‘herleiding tot het absurde’), gaat als volgt. Als je wilt aantonen dat een bepaalde uitspraak juist is, ga er dan van uit dat de uitspraak onjuist is en leidt daar een contradictie uit af:

onjuiste uitspraak \Rightarrow contradictie.

Omdat contradicties niet zijn toegestaan in de exacte wereld van het wiskundig redeneren, moet de aanname onjuist zijn en is de uitspraak in feite juist. Een eenvoudig voorbeeld is het wiskundige bewijs dat de vierkantswortel van 2 geen rationeel getal is (sectie 9.1). Als we aannemen dat de vierkantswortel van 2 wél een rationeel getal is, creëren we een contradictie. Daaruit kunnen we concluderen dat de vierkantswortel van 2 geen rationeel getal is. In sectie 4.3 laat ik zien dat we een contradictie kunnen creëren als we aannemen dat twee specifieke verzamelingen dezelfde omvang hebben. Daaruit concluderen we dat een van de verzamelingen groter is dan de andere. Bewijsvoeringen door middel van contradicties zijn alomtegenwoordig.

Voor een paradox hoeft je geen echte contradictie te creëren. Je hoeft alleen maar een feit af te leiden dat niet strookt met de waarneming of dat domweg onjuist is:

aanname \Rightarrow onjuist feit.

Wederom moet onze aanname onjuist zijn omdat we iets hebben afgeleid wat onjuist is. De paradoxen van Zeno zijn voorbeelden van dit type (sectie 3.2). Zeno neemt iets aan en toont vervolgens aan dat beweging onmogelijk is. Iedereen die ooit op straat heeft gelopen weet dat beweging zich voortdurend voordoet en dat de aanname derhalve onjuist is. De moeilijkheid bij de paradoxen van Zeno is de onjuiste aannamen eruit te halen.

Paradoxen treden dikwijls op en brengen voorheen verborgen aannamen aan het licht. Het zou kunnen dat die aannamen zo diep in ons zijn geworteld dat we er niet eens bij stilstaan (bijvoorbeeld de aanname dat de ruimte ononderbroken is en niet discontinu, of dat concrete objecten exacte definities hebben). Zulke paradoxen zullen een uitda-

ging zijn voor onze intuïties omtrent het universum waarin wij leven. Door aan te tonen dat onze intuïties onjuist zijn, kunnen we ze verwerpen en ons ontwikkelen. De Amerikaanse filosoof Willard Van Orman Quine (1908-2000) schreef welsprekend:

De redenering achter een paradox kan de absurditeit aan het licht brengen van een verborgen premisse of een vooroordeel dat voorheen fundamenteel werd geacht voor de natuurkunde, de wiskunde of het denkproces. In de schijnbaar onschuldigste paradox kan derhalve een catastrofe op de loer liggen. Meer dan eens in de geschiedenis is de ontdekking van een paradox de aanleiding geweest voor een ingrijpende herziening van de fundamenteën van het denken.

Deze methode om paradoxen te onderzoeken en de onderliggende aannamen te achterhalen zal een van de hoofdthema's van dit boek zijn.

Bepaalde soorten paradoxen spelen een belangrijke rol in het verhaal dat wij vertellen. Zelfreferentiële paradoxen zijn paradoxale situaties die voortkomen uit een systeem waarbinnen de objecten van het systeem zichzelf kunnen manipuleren. Het klassieke voorbeeld van een zelfreferentiële paradox is de zogenaamde *leugenaarsparadox*. Neem deze zin:

Deze zin is onwaar.

Als de zin waar is, dan is de zin feitelijk onwaar, omdat hij dat stelt. Als de zin onwaar is, dan is de zin waar, omdat hij zijn eigen onwaarheid verwoordt. Dit is een echte contradictie. Het probleem komt voort uit het feit dat zinnen zowel juiste als onjuiste uitspraken over zichzelf kunnen doen. Zo is 'Deze zin heeft vijf woorden' een legitieme zin die een waarheid omtrent zichzelf verwoordt. 'Deze zin heeft zes woorden' doet daarentegen een onjuiste uitspraak over zichzelf. We zullen zien dat er zich altijd een paradoxale situatie kan voordoen als een systeem eigenschappen van zichzelf kan formuleren. We zullen ontdekken dat taal, het denken, verzamelingen, logica, wiskunde en computers allemaal systemen zijn met het vermogen om zichzelf te manipuleren. Binnen al deze domeinen zal het potentieel voor zelfverwijzing leiden tot

paradoxen en derhalve tot bepaalde beperkingen. Het verbazingwekkende is dat hoewel deze domeinen heel verschillend zijn, de vorm van de paradoxen hetzelfde is.

Een andere manier om een beperking te beschrijven is door mee te liften met een reeds bekende beperking. Laten we het even hebben over bergbeklimmen, voordat ik uitleg wat dat allemaal inhoudt. De Mount Everest is 8850 meter hoog en Mount McKinley is ‘slechts’ 6168 meter hoog. Het volgende feit lijkt evident: als je de Mount Everest kunt beklimmen, kun je zeker (*a fortiori*) Mount McKinley beklimmen. We noteren dit als volgt:

Het beklimmen van Everest \Rightarrow het beklimmen van McKinley.

Als je Mount McKinley kunt beklimmen, zou je heel trots zijn. Wij noteren dit als:

Het beklimmen van McKinley \Rightarrow trots.

Als we de twee implicaties combineren, krijgen we:

Het beklimmen van Everest \Rightarrow het beklimmen van McKinley \Rightarrow trots,

wat tot de voor de hand liggende conclusie leidt dat je heel trots zou zijn als je de Mount Everest kunt beklimmen. Laten we nu kijken naar de schaduwzijde van het bergbeklimmen. Stel dat je dokter tegen je heeft gezegd dat er nare dingen met je kunnen gebeuren als je Mount McKinley zou proberen te beklimmen. Wij noteren dit als:

Het beklimmen van McKinley \Rightarrow nare dingen.

Hiermee wordt een beperking van je vermogens aangegeven: je zou Mount McKinley niet moeten beklimmen. Als je deze implicatie combineert met de eerste, krijg je:

Het beklimmen van Everest \Rightarrow het beklimmen van McKinley \Rightarrow nare dingen.

Dit is een vaststelling van het voor de hand liggende feit dat als je Mount McKinley beter niet kunt beklimmen, je Mount Everest zeker niet moet beklimmen. Met andere woorden, de evidente implicatie

Het beklimmen van Everest \Rightarrow het beklimmen van McKinley

kan gebruikt worden om een bekende beperking over het beklimmen van Mount McKinley over te dragen op of mee te nemen in een beperking met betrekking tot het beklimmen van Mount Everest. Van deze simpele ideeën zal ik gebruikmaken in het hiernavolgende.

Laten we nu dit inzicht omtrent bergbeklimmen gebruiken om het algemene concept te begrijpen hoe de ene beperking op een andere mee kan liften. Stel dat er op de volgende manier een beperking is vastgesteld door middel van een contradictie:

aanname A \Rightarrow contradictie.

Dat wil zeggen, aanname A kan niet juist zijn omdat we daaruit een contradictie afleiden. Neem nu aanname B. Als wij kunnen aantonen dat we van aanname B aanname A kunnen afleiden, dus,

aanname B \Rightarrow aanname A,

dan krijgen we

aanname B \Rightarrow aanname A \Rightarrow contradictie.

Verder uitgewerkt: als aanname B juist is, dan is aanname A ook juist, en omdat we al hebben vastgesteld dat aanname A niet juist is, concluderen wij dat aanname B ook niet juist is. Dit wordt een *herleiding* (ook wel *reductie*) genoemd: de ene aanname wordt herleid tot een andere. Bij een herleiding is er sprake van een overdracht van reeds bekende beperkingen op andere domeinen.

Door het hele boek zijn voorbeelden van herleidingen te vinden:

- Ik laat zien dat als het veel tijd kost voor een computer om een bepaald probleem op te lossen, het een computer nog meer tijd zal

- kosten om andere moeilijkere problemen op te lossen (sectie 5.3).
- Ik laat zien dat als een computer een bepaald probleem niet kan oplossen, moeilijkere problemen ook niet door een computer kunnen worden opgelost (sectie 6.3).
 - Ik gebruik soortgelijke methoden om te laten zien dat bepaalde eenvoudig geformuleerde wiskundige problemen onoplosbaar zijn (sectie 9.3).
 - Andere vergelijkbare herleidingen zijn te vinden in mijn bespreking van de logica (sectie 9.5).

Een paar woorden over contradicties. Het tastbare universum staat geen contradicties toe:

- Een bepaald molecuul kan niet zowel zoutzuur als geen zoutzuur zijn.
- Op hetzelfde moment en op dezelfde plek kan het niet zowel maandag als geen maandag zijn.
- De diagonaal van een vierkant kan niet even lang zijn als de zijkant.

Zo kan ook de wetenschap, als beschrijving van het tastbare universum, geen uitdrukking geven aan contradicties:

- De formules $E = mc^2$ en $E \neq mc^2$ kunnen niet allebei waar zijn.
- Een berekening met betrekking tot een chemisch proces kan niet zowel waar als onwaar zijn.
- Een voorspelling kan niet twee onverenigbare gebeurtenissen voorspellen.

Als de wetenschap een contradictie zou bevatten, zou die geen exacte beschrijving zijn van het contradictievrije universum. Hetzelfde geldt voor de wiskunde en de logica: voor zover die gebruikt worden als beschrijving van het universum en de wetenschap, kunnen zij geen contradicties bevatten.

Er is echter een plek waar contradicties zich wel voordoen, namelijk in de menselijke geest. Wij zitten allemaal vol contradicties; we verlangen naar contradictoire dingen; we geloven in contradictoire ideeën; en we voorspellen contradictoire gebeurtenissen. Iedereen die ooit een

relatie heeft gehad, kent het gevoel tegelijk van iemand te houden en hem of haar te haten. Wij willen zowel taart eten als slank zijn. Zoals de koningin tegen Alice zegt in *Alice in Spiegelglas*: ‘Er waren dagen waarop ik voor het ontbijt al zes onmogelijke dingen had gelooft.’ De menselijke geest is geen perfecte machine. Wij verkeren in tweestrijd en verwarring. Zo moet ook de menselijke taal, die gemoedstoestanden weergeeft, contradicties bevatten. Er is niets vreemds aan de uitspraak ‘ik hou van haar en ik haat haar’. Het is niet ongebruikelijk dat iemand zegt dat hij slank wil zijn en toch nog een stuk taart neemt.

Als we in de tastbare wereld op een paradox stuiten en tot een contradictie komen, weten we dat er iets mis moet zijn met de aanname of de paradox. Maar als we op een contradictie stuiten in het domein van het menselijk denken of in de menselijke taal, hoeven we de aanname niet op te geven. Dan is er meer subtiliteit mogelijk. Waarom zouden we de contradictie niet toestaan? Neem de eerder besproken leugenaarsparadox. Waarom zouden we niet eenvoudigweg zeggen dat de zin

Deze zin is onwaar

zowel waar als onwaar is of misschien betekenisloos? Het is gewoon een zin en veel zinnen bevatten contradicties. Zo is ook de overtuiging

Deze overtuiging is onjuist

zowel juist als onjuist. Waarom zouden we zulke contradictoire overtuigingen niet toelaten in onze toch al verwarde geest?

De relatie tussen het contradictievrije universum en onze zwakke menselijke geesten en talen roept veel meer interessante vragen op. Hoe komt het dat de menselijke geest om het even welk deel van het universum kan begrijpen? Hoe kan een door mensen geformuleerde taal het universum beschrijven? Waarom werkt de wetenschap? Waarom is de wiskunde zo goed in het beschrijven van de wetenschap en het universum? Bestaan de wetten van de wetenschap buiten ons of alleen in ons hoofd? Kan er een definitieve beschrijving van het universum zijn – dat wil zeggen, zal de wetenschap haar missie ooit kunnen voltooien en haar doel bereiken? Zijn de waarheden van de weten-

schap en de wiskunde tijd- of cultuurgebonden? Hoe kunnen mensen bepalen of een wetenschappelijke theorie juist is? Zoals Albert Einstein schreef: ‘Het eeuwige raadsel van de wereld is zijn begrijpelijkheid.’ Deze en vele andere vragen uit de filosofie van de wetenschap en de wiskunde komen in hoofdstuk 8 aan de orde.

Tussen het contradictievrije universum en de van contradicties vergeven menselijke geest ligt een heel vaag landschap:

- Iemand die in de deuropening van een kamer staat, bevindt zich zowel in de kamer als daarbuiten.
- Hoeveel haren moet iemand verliezen voordat men hem als kaal beschouwt? Afhankelijk van hoe de wind waait, vindt men hem soms kaal en soms niet kaal.
- Is 42 een klein of een groot aantal?

Mensen bedienen zich voortdurend van vage ideeën. Onze geestesgesteldheid en de menselijke taal waarmee die gepaard gaat zit vol vage uitspraken:

- Soms zeggen we dat mensen in een deuropening in de kamer zijn en soms zeggen we dat ze niet in de kamer zijn.
- Sommige mensen met een paar haren noemen we kaal en andere niet.
- Als er maar 42 dollar op onze bankrekening staat, noemen we 42 een klein bedrag, maar als we het hebben over het aantal ziektes dat iemand heeft, is 42 een groot aantal.

Omdat vage ideeën zich buiten de zuivere wereld van de wetenschap en de wiskunde bevinden, kunnen we bij de behandeling van die ideeën niet vertrouwen op een aantal van de gebruikelijke hulpmiddelen. Vaagheid speelt een grote rol in onze verhandelingen in hoofdstuk 3.

Als een kleine terzijde zijn bepaalde soorten grappen interessant in het kader van onze beschouwing. We hebben gezien dat paradoxen manieren zijn om aan te tonen dat iemand de rede te ver heeft doorgevoerd. De schending van een paradox betekent dat je de grenzen van de rede hebt overschreden en het domein van het absurde hebt betreden. Er

zijn ook grappen die spelen met het feit dat wij de rede te ver doorvoeren. Zulke grappen brengen de logica en de rede op onlogische en onredelijke plaatsen. Ze beginnen met welbegrepen concepten en gaan daarmee aan de haal. Zoals de volgende:

- Woody Allen heeft gespiekt bij zijn examen metafysica door in de ziel van de jongen naast hem te kijken.
- Steven Wright zei dat hij een moord zou plegen voor de Nobelprijs voor de vrede.
- Groucho Marx wilde geen lid zijn van een club die hem als lid wilde hebben.

Bij al deze grappen worden normale ideeën te ver doorgevoerd. Spieken bij een examen, de Nobelprijs voor de vrede willen krijgen, of uit weerzin je lidmaatschap van een club opzeggen zijn allemaal gewone ideeën. Maar deze grote denkers hebben deze gebruikelijke concepten tot in het dwaze en belachelijke doorgevoerd.

Ook woordspelingen behoren tot deze categorie. Een woordspeling is een grap waarbij de betekenis van een woord of een zin een andere wending krijgt.

- De bultenaar besefte dat hij het ergste achter de rug had.
- De cursus lessen voor beginners is afgelast.
- Ga gerust naar de dokter; hij wordt er beter van.

Kreun! (Sorry. Het enige wat erger is dan een woordspeling is een analyse van een woordspeling. Laten we maar doorgaan.)

Ik besluit deze inleiding met een paar vragen over de aard van de rede en haar beperkingen. Lees het boek met deze vragen in het achterhoofd. Ik zal in het laatste hoofdstuk op deze kwesties terugkomen en misschien dichterbij de antwoorden komen met behulp van enkele ideeën die in dit boek worden besproken.

Ik zou tekortschieten als ik een boek zou schrijven over de grenzen van de menselijke rede zonder een definitie te geven. Want hoe kunnen we zeggen dat iets de grenzen van de rede overschrijdt als we die niet definiëren? Wat is een redelijk proces om feiten vast te stellen? Heeft de

rede verschillende niveaus? Hoe trekken we de grens tussen alchemie en chemie? Tussen astrologie en astronomie? Waarom worden sommige handelingen redelijk geacht en andere niet? Waarom is het zinnig om je bloeddruk te laten controleren maar belachelijk om je horoscoop te laten trekken? Welke denkprocessen zijn redelijk en zullen contradicties voorkomen?

De *Oxford English Dictionary* geeft zestien soorten definities voor het woord 'rede'. De definitie die het dichtst in de buurt komt van de door ons gewenste is de volgende: 'Het vermogen van de geest om te denken en door een logisch proces tot valide oordelen te komen; het mentale vermogen dat gebruikt wordt om het denken of handelen op een bepaald doel af te stemmen; het leidende beginsel van de geest bij het denkproces. Dikwijls in tegenstelling tot de *wil*, *verbeelding*, *hartstocht*, enzovoort. Vaak gepersonifieerd.' Deze definitie roept echter alleen maar meer vragen op. Wat is een 'valide oordeel'? Wanneer is iets een logisch proces, in tegenstelling tot een onlogisch proces? Wanneer is denken een onderdeel van de wil en wanneer spreken we van de rede? Deze definitie is onbevredigend. Andere mogelijke definities zijn niet veel beter.

Onze hele onderneming heeft iets zelfreferentieels. We bedienen ons van de rede om beperkingen van de rede te vinden. Maar hoe moeten we die beperkingen ontdekken als de rede zelf beperkt is? Wat zijn de grenzen van onze vermogens om grenzen aan te tonen?

Laten we deze vragen nog even voor ons uit schuiven en er in hoofdstuk 10 op terugkomen, wanneer we onze verkenningen van de grenzen van de rede zullen besluiten.

Verdere lectuur

Andere boeken waarin beperkingen van de rede worden behandeld zijn Barrow (1999), Dewdney (2004) en Poundstone (1989). Sorensen (2003) is een geweldige geschiedenis van de paradox.